

## Termodinâmica 2/2015 Trabalho de Casa 8

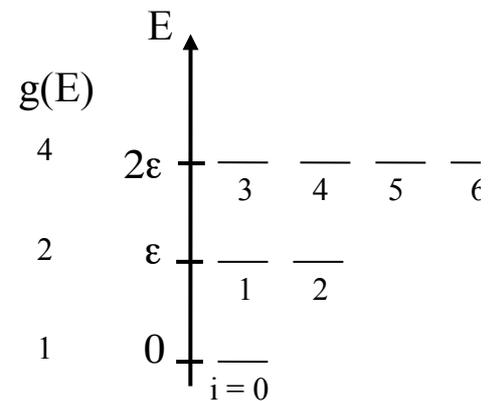
Entrega até segunda, 02/03, às 18:00.

Você deve exibir todos os detalhes das soluções. Sempre que isto for apropriado, deduza uma expressão algébrica primeiro e só ponha números no último passo.

**1. (a)** Considere um átomo de hidrogênio à temperatura ambiente e estime a razão entre as probabilidades de encontrar este átomo no 1º estado excitado e no estado fundamental:  $P(E=1)/P(E=0)$ . Não se esqueça que os níveis de energia do átomo de hidrogênio são degenerados. [Calcule o valor, não importa quão pequeno seja, em termos de potências de 10. "Zero" não é uma resposta aceitável.]

**(b)** Repita o cálculo, agora para um átomo de hidrogênio na atmosfera da estrela gama da constelação da Ursa Maior, cuja superfície está a uma temperatura de 9500K.

**2.** Imagine uma partícula em contato térmico com um reservatório à temperatura  $T$ . A partícula pode estar em qualquer um de apenas 3 níveis de energia, com energias  $0$ ,  $+\epsilon$ , e  $+2\epsilon$ . Estes níveis são degenerados, e suas degenerescências são  $g(0)=1$ ,  $g(\epsilon)=2$ ,  $g(2\epsilon)=4$ .



A) Calcule a função de partição para esta partícula.

B) Calcule a probabilidade de que esta partícula seja encontrada com cada uma destas 3 energias. Isto é, calcule 3 probabilidades:  $P(E=0)$ ,  $P(E=\epsilon)$ , e  $P(E=2\epsilon)$ .

C) Use um programa de computador para fazer o gráfico destas 3 probabilidades vs. a temperatura adimensional  $kT/\epsilon$ . Mostre as 3 probabilidades no mesmo gráfico.

D) Calcule a energia média por partícula  $\bar{E}$ . Qual o limite de altas temperaturas desta energia média?

E) Use um programa de computador para plotar a energia média  $\bar{E}$  vs temperatura, usando quantidades adimensionais  $\bar{E}/\epsilon$  vs.  $kT/\epsilon$ .

**3.** O desvio padrão é definido como  $\sigma_E = \sqrt{\frac{\sum_i (E_i - \bar{E})^2}{N}}$ . Mostre que isto é equivalente a

$$\sigma_E^2 = \overline{E^2} - (\bar{E})^2.$$

4. Considere um sistema em equilíbrio com um reservatório a temperatura T.

A) Prove que a energia média do sistema está relacionado com a função de partição pela expressão  $\bar{E} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$ , onde  $\beta = 1/kT$ .

B) Prove que o valor médio de  $E^2$  é dado por  $\overline{E^2} = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2}$ .

C) Deduza uma fórmula para  $\sigma_E$  em termos da capacidade térmica  $C = \frac{\partial \bar{E}}{\partial T}$ . Você deve encontrar que  $\sigma_E = kT \sqrt{\frac{C}{k}}$ . Dica: É mais fácil supor que  $\sigma_E = kT \sqrt{\frac{C}{k}}$  é verdadeiro, e a partir desta hipótese mostrar que isto é equivalente ao valor de  $\sigma_E$  que você obtém com o resultado do problema (3).

5. Considere um sistema de N osciladores harmônicos unidimensionais (1D), um sólido de Einstein, no limite de altas temperaturas, em equilíbrio com um reservatório a temperatura T.

A) De acordo com o teorema da equipartição, qual é a energia média deste sistema?

B) Use os resultados do problema (4) para deduzir uma fórmula para o desvio padrão da energia deste sistema.

C) Escreva uma expressão para a flutuação relativa na energia,  $\sigma_E / \bar{E}$ . Calcule esta fração para  $N=1, 10^3, e 10^{23}$ .

6. Considere um conjunto de N osciladores harmônicos unidimensionais (1D) idênticos a fracamente acoplados. (Um sólido de Einstein.) Cada oscilador tem níveis de energia não degenerados  $E = 0, \epsilon, 2\epsilon, 3\epsilon \dots$ , onde  $\epsilon = hf$ .

A) Qual a função de partição para um único oscilador harmônico 1D? Use que

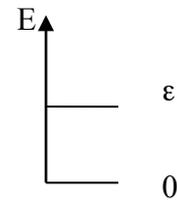
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \text{ para simplificar sua resposta tanto quanto possível.}$$

B) Deduza uma expressão para a energia média de um único oscilador harmônico 1D a temperatura T. Simplifique sua resposta tanto quanto possível. Dica: Reveja o problema 4.

C) Qual a energia total de um sistema de N osciladores à temperatura T? Verifique sua resposta checando se o limite de altas temperaturas ( $kT \gg \epsilon$ ) coincide com a previsão do teorema da equipartição. [Dica: Relembre a expansão em série de Taylor de  $e^x$  quando  $x \ll 1$ .]

D) Calcule a capacidade térmica do sistema com  $N$  osciladores. Faça um gráfico da capacidade térmica (usando quantidade adimensional adequada) vs. temperatura (expressa também de forma adimensional).

7. Uma partícula de spin  $1/2$  num campo magnético é um exemplo de um “sistema de 2 níveis”, um sistema com um estado fundamental e um único estado excitado (ambos não degenerados). Vamos escolher o valor zero para a energia do estado fundamental (a convenção usual) e assim a energia do primeiro estado excitado é  $\epsilon$ .



(A) Escreva a função de partição deste sistema.

(B) Encontre a energia média deste sistema à temperatura  $T$ .

(C) Encontre a capacidade térmica do sistema  $C$  como função da temperatura.

(D) Represente num mesmo par de eixos os gráficos da energia média (adimensional,  $E/\epsilon$ ) e da capacidade térmica ( $C/k$ ) vs temperatura  $kT/\epsilon$ .

8. (A) Faça um gráfico da distribuição de velocidades de Maxwell para moléculas de nitrogênio a  $T = 300\text{K}$  e  $T = 600\text{K}$ . Use os mesmos eixos para ambos.

(B) A  $300\text{K}$ , qual a fração de moléculas de nitrogênio do ar que se movem com velocidades menores que  $300\text{ m/s}$ ?

(C) A velocidade de escape da Terra é  $11\text{ km/s}$ . Moléculas da alta atmosfera que se movam mais rápido que isso vão escapar se não sofrerem colisão que altere sua trajetória de saída. A temperatura da alta atmosfera terrestre é surpreendentemente alta, cerca de  $1000\text{ K}$ . Calcule a probabilidade de que uma molécula de  $\text{N}_2$  a esta temperatura se mova com velocidade maior que  $11\text{ km/s}$  e comente seu resultado.

(D) Repita este cálculo para uma molécula de  $\text{H}_2$  e comente seu resultado. Ele pode explicar porque não há um número significativo de moléculas de hidrogênio na atmosfera terrestre?

Problem	Points
1	2
2	4
3	2
4	2
5	2
6	2
7	2
8	4
<b>Total</b>	<b>20</b>